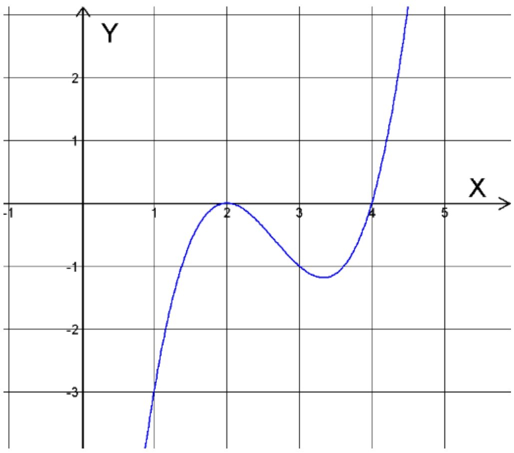
Några uppgifter om faktorsatsen och restsatsen

1. För fjärdegradspolynomet p gäller att nollställena är $x = -2$, $x = 1$, $x = 2$, och $x = 3$. Inga övriga konstanttermer förekommer.

   a) Skriv p på faktorform.

   b) Divisionen $\dfrac{p}{x+2}$ kommer ge ett nytt polynom som svar.
   Skriv detta polynom på *faktorform*

2. Figuren visar grafen till funktionen $p(x) = x^3 - 8x^2 + 20x - 16$



Bestäm resten vid divisionen $\dfrac{x^3 - 8x^2 + 20x - 16}{x - 1}$

   a) med polynomdivision

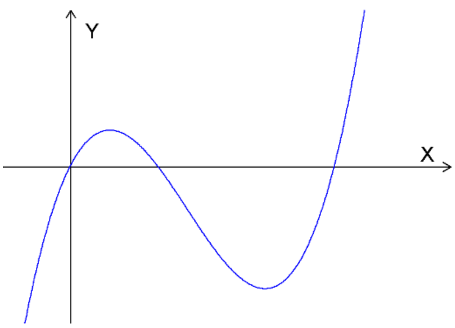
   b) med restsatsen

   c) genom att läsa av grafen

   d) Ange en nämnare som med samma täljare skulle ge resten noll.

3. Till höger visas grafen till
   $p(x) = 2x^3 - 8x^2 + 6x$

   Bestäm de tre nollställena till $p(x)$



4. Bestäm talet a så att divisionen $\dfrac{x^3 + 4x^2 - 2x + a}{x - 1}$ får resten noll.

5. Polynomet $p(x) = x^4 - 10x^3 + 28x^2 - 40x + 96$
   kan skrivas $p(x) = (x^2 + 4) \cdot (andragradspolynom)$.

   a) Bestäm resten vid division med $(x - 1)$

   b) Bestäm $andragradspolynomet$

6. $p(x) = x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 14x - 8$ har en dubbelrot vid $x = 1$.

Den givna informationen säger att det finns två olika nämnare som skulle ge resten noll. Vilka är dessa två?

7. $p(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$ har de två nollställena $x = \pm 1$.

a) Visa att både $x = \pm 1$ är nollställen.

b) Bestäm de övriga två nollställena.

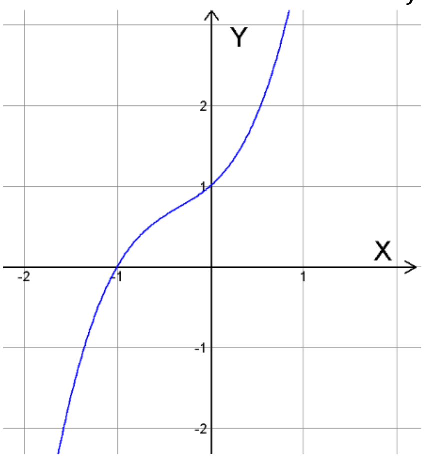
8. I uppgift 6 sas att $p(x) = x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 14x - 8$ har en dubbelrot vid $x = 1$.

Bestäm de övriga två rötterna

9. Polynomet $p(x) = x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 20x^2 + 4x - 16$ har rötterna $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = -2$

Bestäm den sista roten.

10. Grafen nedan visar funktionen $f(z) = z^3 + z^2 + z + 1$



Bestäm dess två komplexa rötter

11. För polynomet $f(z) = z^4 - 4z^3 + z^2 + 16z - 20$ gäller att en faktor är $(z^2 - 4)$.
Lös ekvationen $f(z) = 0$

12. Lös uppgiften ifrån det gamla NP nedan.

För polynomet p gäller att $p(z) = z^5 + 4z^3 - 2z^2 - 8$

a) Visa att $(z^2 + 4)$ är en faktor i polynomet p. (0/2/0)

b) Lös ekvationen $z^5 + 4z^3 - 2z^2 - 8 = 0$ (0/1/2)

FACIT - Några uppgifter om faktorsatsen och restsatsen

1. a) $p(x) = (x+2)(x-1)(x-2)(x-3)$

   b) Delas faktorn $(x+2)$ bort återstår de övriga, dvs svaret blir: $(x-1)(x-2)(x-3)$

2. a)

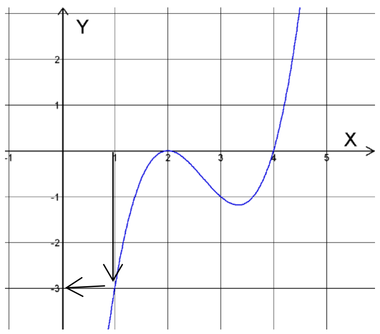
$$\frac{1{,}0x^3 - 8{,}0x^2 + 20{,}0x - 16{,}0}{1{,}0x - 1{,}0} = 1{,}0x^2 - 7{,}0x + 13{,}0 - \frac{3{,}0}{1{,}0x - 1{,}0}$$

```
    1,0x² - 7,0x + 13,0
    1,0x³ - 8,0x² + 20,0x - 16,0   | 1,0x - 1,0
   (1,0x³ - 1,0x²)
      0 x³ - 7,0x²
       - ( - 7,0x² + 7,0x)
           0 x²    + 13,0x
            - ( + 13,0x - 13,0)
                0 x      - 3,0
```

Resten blir -3

   b) Nämnaren är $(x-1)$. Den blir noll för $x = 1$. Det insatt i p ger:
   $p(1) = 1 - 8 + 20 - 16 = 21 - 24 = -3$

   c)



Grafens värde då $x = 1$ är -3

   d) Nollställena är $x = 2$ och $x = 4$.
   Motsvarande faktorer är $(x-2)$ och $(x-4)$.
   Båda dessa var för sig, eller tillsammans, skulle ge resten noll

3. Ett av nollställena är $x = 0$
(vilket även syns då konstanttermen är noll). Division med x
(vilket även kan göras utan polynomdivision) ger andragradsfunktionen:
$2x^2 - 8x + 6$
Den har nollställena: $x = 1$ och $x = 3$.

4. Det går att polynomdividera, men snabbast går att använda restsatsen,
Nämnaren blir noll för $x = 1$. Det insatt i täljaren ger $1 + 4 - 2 + a = 3 + a$
Om det ska bli noll krävs att $a = -3$

5. a) Restsatsen ger $1 - 10 + 28 - 40 + 96 = 75$

   b) Divisionen ger kvoten $x^2 - 10x + 24$
   Den har nollställena $x = 4$ och $x = 6$

6. Dubbelrot vid $x = 1$ innebär att $p(x) = (x-1) \cdot (x-1) \cdot (andragradare)$.
Det bör alltså bli jämnt vid division med $(x-1)$ eller med $(x-1)^2 = (x^2 - 2x + 1)$

7. $p(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$ har de två nollställena $x = \pm 1$.

a) Beräkna $p(1)$ och $p(-1)$ och se att svaret blir noll.
$p(1) = 1 - 5 + 5 + 5 - 6 = 0$
$p(-1) = 1 + 5 + 5 - 5 - 6 = 0$

b) $p(x) = (x-1)(x+1)(andragradare)$
Gångra ihop de givna faktorerna och utför divisionen $\frac{p(x)}{x^2-1}$
Den ger kvoten, och därmed andragradaren , till $x^2 - 5x + 6$.
Den har nollställena $x = 2$ och $x = 3$

8. Dubbelrot vid $x = 1$ innebär att $p(x) = (x+1) \cdot (x+1) \cdot (andragradare)$.
Divisionen $\frac{p(x)}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 14x - 8}{x^2 - 2x + 1}$ bör gå jämnt ut och ge andragradaren som svar:

$$
\begin{array}{l}
x^2 - 2x - 8 \\
\hline
x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 14x - 8 \;\; \big| \; x^2 - 2x + 1 \\
-(x^4 - 2x^3 + x^2) \\
\hline
0 \;\; -2x^3 - 4x^2 \\
\quad -(-2x^3 + 4x^2 - 2x) \\
\hline
\quad 0 \;\; -8x^2 + 16x \\
\qquad -(-8x^2 + 16x - 8) \\
\hline
\qquad 0 \quad 0 \quad 0
\end{array}
$$

Kvoten blir alltså $x^2 - 2x - 8$ och dess nollställen blir $x = -2$ och $x = 4$

9. Skriv om polynomet på faktorform, $p(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(okänd)$
Den okända faktorn fås t.ex. genom att multiplicera ihop övriga (till en fjärdegradare) och dela $p(x)$ med den.
$(x-1)(x+1) = (x^2 - 1)$
$(x-2)(x+2) = (x^2 - 4)$
Dessa tillsammans blir: $(x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x^4 - 5x^2 + 4)$.
Divisionen med denna faktor ger sista faktorn till $(x - 4) \rightarrow$ Lösningen är: $x = 4$

10. $\frac{z^3+z^2+z+1}{z+1} = z^2 + 1$
Den har nollställena: $z^2 + 1 = 0 \quad z = \pm\sqrt{-1} = \pm i$

11. $\frac{z^4-4z^3+z^2+16z-20}{z^2-4} = z^2 - 4z + 5$

Den kvoten har nollställena: $z^2 - 4z + 5 = 0 \quad z = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm i$

12. a) Godtagbar ansats, t ex påbörjar en korrekt uppställd polynomdivision +1 C_R
med i övrigt godtagbart slutfört bevis +1 C_R

b) Godtagbar ansats, bestämmer minst tre rötter +1 C_P
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($z_1 = -2i$, $z_2 = 2i$, $z_3 = \sqrt[3]{2}$, $z_4 = \sqrt[3]{2}(\cos 120° + i \sin 120°)$ och $z_5 = \sqrt[3]{2}(\cos 240° + i \sin 240°)$) +1 A_{PL}

Lösningen (deluppgift a och b) kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara likhetstecken, minustecken, rottecken, index, parenteser, termer såsom polär form, koefficient samt hänvisning till de Moivres formel etc. +1 A_K